Cvičení 3

Indukce

Příklad 1 Dokažte, že každá neprázdná konečná množina o n prvcích má 2^n podmnožin

Příklad 2 Dokažte, že

$$\sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$$

Příklad 3 Dokažte, že $8|(n^2 - 1)$ pro každé liché $n > 0$.

Relace

Příklad 1 Rozhodněte, zda jsou následující relace tranzitivní, reflexivní, symetrické nebo antisymetrické a jestli se jedná o ekvivalenci nebo částečné uspořádání.

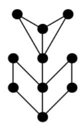
1. 3 kamarádi. Každí 2 kamarádi od sebe bydlí 5 km. Relaci definujeme jako "bydlet od sebe 5km".
2. 3 kamarádi bydlí na jedné rovné ulici. Každí 2 sousední kamarádi od sebe bydlí 5 km. Relaci definujeme jako "bydlet od sebe 5km".
3. $R = \{(1,2),(2,3),(1,1),(2,2),(1,3),(3,3)\}$

Příklad 2 **Dokažte, že relace R na množině X je tranzitivní, právě když** $R \circ R \subseteq R$ - 3b

Příklad 3 Nechť R a S jsou dvě libovolné ekvivalence na téže množině X. Jsou pak některé z relací $R \cup S$, $R \cap S$, R S, $R \circ S$ také ekvivalence na X? Zdůvodněte.

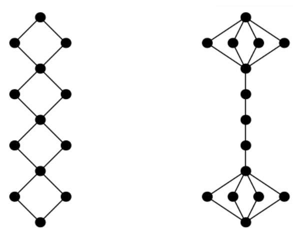
Uspořádání

Příklad 1 Nalezněte minimální, nejmenší, maximální a největší prvky v následujícím částečném uspořádání.



Příklad 2 **Určete maximální a minimální prvky částečného uspořádání** $(\{2,3,\ldots,n\},\leq)$**, kde** $a \leq b$ **právě když** a **dělí** b**. Které prvky jsou současně maximální a minimální?** - 3b

Příklad 3 Zjistěte, kolik různých lineárních rozšíření mají následující uspořádání popsaná Hasseho diagramem.



Příklad 4 **Nalezněte pro každé** $k \in N$ **částečná uspořádání (pro vhodný počet prvků** n**), která mají 1)** $(3!)^k$ **a 2)** $k! \cdot k!$ **lineárních rozšíření.** - 2b

Funkce

Příklad 1 Uveďte příklady funkcí, které jsou prosté, ale nejsou na; jsou na, ale nejsou prosté; nejsou ani prosté ani na; jsou prosté i na. - 2b