Cvičení 1

Logika

Příklad 1 Napište negace následujících tvrzení.

1. $(A \wedge B) \implies (B \vee C)$
2. **Toto** $(A \implies (B \vee C)) \wedge (B \implies C)$
3. $(A \wedge B) \iff (A \vee C)$

Příklad 2 Každé z následujících tvrzení vyjádřete ekvivalentní výrokovou formulí, s využitím kvantifikátorů, logických spojek a symbolu $a|b$, který znamená, že a je dělitel b.

1. Pokud množina M obsahuje všechny dělitele čísla 15, pak M obsahuje i všechny dělitele čísla 27.
2. **Pro každé číslo z množiny Y platí, že pokud je sudé, potom jeho trojnásobek je také sudý.**
3. Pokud každé sudé přirozené číslo patří do množiny M, pak žádné sudé přirozené číslo nepatří do množiny N.
4. Žádné číslo z množiny X není násobkem všech čísel z množiny M.

Příklad 3 Napište negace následujících tvrzení.

1. Číslo n má aspoň jednoho dělitele, který není dělitelem žádného čísla menšího než n.
2. **Pokud je v každém kroužku aspoň jeden student, který chodí na přednášku z analýzy, pak v žádném kroužku není víc než pět studentů navštěvujících přednášku z algebry.**
3. **Každá množina pěti čísel obsahuje aspoň tři lichá čísla nebo aspoň tři sudá čísla.**
4. **Každý student, který získal alespoň dvacet bodů v zápočtovém testu, má nárok na udělení zápočtu.**

Příklad 4 **Zapište všechny logické spojky pouze pomocí implikace a negace**

Důkazy

Příklad 1 K následujícím implikacím zformulujte obměnu.

1. Pokud existuje liché prvočíslo, pak pro žádné $x \in \mathbb{N}$ neexistuje $y \in \mathbb{N}$ takové, že $y > x$.
2. **Pokud x je dělitelné 6 a y je dělitelné 7, pak $x \cdot y$ je sudé.**
3. $(\forall x \in \mathbb{N} y \in \mathbb{N} : y = x + 1) \implies (\exists y \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{N} : y = x + 1)$.
4. **Pokud jsou všechny ovce bílé, jsou všechny kočky černé.**

Příklad 2 Dokažte obměnou:

1. **Jestliže $n^2 + 2$ není dělitelné třemi, pak n je dělitelné třemi**
2. Pokud je xy liché, pak x i y jsou liché
3. Pokud a a b jsou reálné a ab je iracionální, pak alespoň jedno z a, b je iracionální

Příklad 3 Dokažte sporem:

1. **Neexistuje největší přirozené číslo**
2. Číslo $\sqrt{2}$ je iracionální (Nápověda: Dokažte, že pokud $p^2 = 2q^2$, pak p i q jsou sudá.)
3. Existuje nekonečně mnoho prvočísel. (Nápověda: Pokud $a_1, \ldots, a_k > 1$, pak $a1 \cdot \cdots \cdot a_k + 1$ není dělitelné žádným z a_i.